Kompleksna analiza

Pavle Pandžić, 11. predavanje

Prisjetimo se: Schwarzova lema

Neka je $f : K(0,1) \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija takva da je $f(K(0,1)) \subseteq K(0,1)$ i $f(0) = 0$.

Prisjetimo se: Schwarzova lema

Neka je $f : K(0,1) \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija takva da je $f(K(0,1)) \subseteq K(0,1)$ i $f(0) = 0$.

Tada je istinita točno jedna od sljedeće dvije tvrdnje:

1. $|f(z)| < |z|$ za svaki $z \in K^*(0,1)$ i $|f'(0)| < 1$;

Prisjetimo se: Schwarzova lema

Neka je $f : K(0,1) \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija takva da je $f(K(0,1)) \subseteq K(0,1)$ i $f(0) = 0$.

Tada je istinita točno jedna od sljedeće dvije tvrdnje:

1. $|f(z)| < |z|$ za svaki $z \in K^*(0,1)$ i $|f'(0)| < 1$;
2. postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $f(z) = e^{i\alpha} z$ za svaki $z \in K(0,1)$, tj. f je rotacija oko 0 za kut α.

Prisjetimo se: jednostavno povezana područja

Područje $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je jednostavno povezano ako je svaka petlja (zatvoren put) u Ω nul-homotopna u Ω.

Prisjetimo se: jednostavno povezana područja

Područje $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je jednostavno povezano ako je svaka petlja (zatvoren put) u Ω nul-homotopna u Ω.

Napomena 1. Neka je Ω jednostavno povezano područje i neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija bez nultočaka. Tada možemo na Ω definirati funkciju $g(z) = \log f(z)$ sa svojstvom $e^{g(z)} = f(z)$, $z \in \Omega$.

Prisjetimo se: jednostavno povezana područja

Područje $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je jednostavno povezano ako je svaka petlja (zatvoren put) u Ω nul-homotopna u Ω.

Napomena 1. Neka je Ω jednostavno povezano područje i neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija bez nultočaka. Tada možemo na Ω definirati funkciju $g(z) = \log f(z)$ sa svojstvom $e^{g(z)} = f(z)$, $z \in \Omega$.

Funkcija $g(z)$ je primitivna funkcija funkcije $\frac{f'(z)}{f(z)}$ i može se konstruirati integriranjem funkcije $\frac{f'(w)}{f(w)}$ po bilo kojem putu od nekog fiksiranog z_0 do z.

Prisjetimo se: jednostavno povezana područja

Područje $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je jednostavno povezano ako je svaka petlja (zatvoren put) u Ω nul-homotopna u Ω.

Napomena 1. Neka je Ω jednostavno povezano područje i neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija bez nultočaka. Tada možemo na Ω definirati funkciju $g(z) = \log f(z)$ sa svojstvom $e^{g(z)} = f(z)$, $z \in \Omega$.

Funkcija $g(z)$ je primitivna funkcija funkcije $\frac{f'(z)}{f(z)}$ i može se konstruirati integriranjem funkcije $\frac{f'(w)}{f(w)}$ po bilo kojem putu od nekog fiksiranog z_0 do z.

Da je integracija neovisna o putu slijedi iz činjenice da je Ω jednostavno povezano područje i općeg Cauchyjevog teorema.

Prisjetimo se: Riemannov Teorem o preslikavanju

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ jednostavno povezano područje različito od cijelog $\mathbb{C}$. Neka je $z_0 \in \Omega$.

Prisjetimo se: Riemannov Teorem o preslikavanju

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ jednostavno povezano područje različito od cijelog $\mathbb{C}$. Neka je $z_0 \in \Omega$.

Tada postoji jedinstven holomorfni izomorfizam $F : \Omega \to K(0, 1)$ takav da vrijedi

1. $F(z_0) = 0$;

Prisjetimo se: Riemannov Teorem o preslikavanju

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ jednostavno povezano područje različito od cijelog $\mathbb{C}$. Neka je $z_0 \in \Omega$.

Tada postoji jedinstven holomorfni izomorfizam $F : \Omega \to K(0,1)$ takav da vrijedi

1. $F(z_0) = 0$;
2. $F'(z_0)$ je pozitivan realan broj.

Napomena 2

Tvrdnja Riemannovog Teorema o preslikavanju ne vrijedi za $\Omega = \mathbb{C}$.

Napomena 2

Tvrdnja Riemannovog Teorema o preslikavanju ne vrijedi za $\Omega = \mathbb{C}$.

Naime, po Liouvilleovom teoremu, svaka holomorfna funkcija $F : \mathbb{C} \to K(0,1)$ mora biti konstanta, pa ne može biti holomorfni izomorfizam.

Prošli put smo pomoću Schwartzove leme dokazali jedinstvenost preslikavanja F kao u teoremu. Sada ćemo dokazati egzistenciju.

Prošli put smo pomoću Schwartzove leme dokazali jedinstvenost preslikavanja F kao u teoremu. Sada ćemo dokazati egzistenciju.

Slijedit ćemo dokaz koji je na svoju web stranicu postavio Ved V. Datar:

https://math.berkeley.edu/∼vvdatar/m185f16/notes/Riemann_Mapping.pdf

Dokaz Riemannovog teorema o preslikavanju koji ćemo izložiti bazira se na Montelovom i Hurwitzovom teoremu.

Montelov teorem

Neka je $\mathcal{F}$ familija holomorfnih funkcija na području $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.
Pretpostavimo da je familija $\mathcal{F}$ lokalno uniformno ograničena, tj. da za svaki $z_0 \in \Omega$ postoji otvorena okolina U i konstanta $M > 0$, tako da je

$$|f(z)| < M, \qquad \forall f \in \mathcal{F},\ \forall z \in U.$$

Montelov teorem

Neka je $\mathcal{F}$ familija holomorfnih funkcija na području $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Pretpostavimo da je familija $\mathcal{F}$ lokalno uniformno ograničena, tj. da za svaki $z_0 \in \Omega$ postoji otvorena okolina U i konstanta $M > 0$, tako da je

$$|f(z)| < M, \qquad \forall f \in \mathcal{F},\ \forall z \in U.$$

Tada je familija $\mathcal{F}$ normalna, tj. svaki niz funkcija iz $\mathcal{F}$ ima podniz koji konvergira lokalno uniformno na Ω.

Hurwitzov teorem

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje.

Hurwitzov teorem

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje.

Neka je $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ niz holomorfnih injektivnih funkcija koje konvergiraju prema $F : \Omega \to \mathbb{C}$ lokalno uniformno na Ω.

Hurwitzov teorem

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje.

Neka je $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ niz holomorfnih injektivnih funkcija koje konvergiraju prema $F : \Omega \to \mathbb{C}$ lokalno uniformno na Ω.

Tada je F ili injektivna funkcija ili konstanta.

Dokaz Riemannovog teorema o preslikavanju pomoću Montelovog i Hurwitzovog teorema

Neka je $\mathcal{F}$ familija funkcija na Ω zadana sa

$$\mathcal{F} = \{f : \Omega \to K(0,1) \,\big|\, f \text{ je holomorfna i injektivna, } f(z_0) = 0\}.$$

Dokaz Riemannovog teorema o preslikavanju pomoću Montelovog i Hurwitzovog teorema

Neka je $\mathcal{F}$ familija funkcija na Ω zadana sa

$$\mathcal{F} = \{f : \Omega \to K(0,1) \,\big|\, f \text{ je holomorfna i injektivna, } f(z_0) = 0\}.$$

Traženi holomorfni izomorfizam bit će konstruiran maksimiziranjem $|f'(z_0)|$ po $f \in \mathcal{F}$.

Lemma 1

Familija $\mathcal{F}$ nije prazna, tj. postoji holomorfna injektivna funkcija $f : \Omega \to K(0,1)$ takva da je $f(z_0) = 0$.

Dokaz Leme 1

Budući da je $\Omega \neq \mathbb{C}$, postoji $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Tada je $z - a \neq 0$ za svaki $z \in \Omega$.

Dokaz Leme 1

Budući da je $\Omega \neq \mathbb{C}$, postoji $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Tada je $z - a \neq 0$ za svaki $z \in \Omega$.

Budući da je područje Ω jednostavno povezano, po Napomeni 1 možemo definirati holomorfnu funkcija $\log(z - a)$, odnosno postoji holomorfna funkcija $l : \Omega \to \mathbb{C}$ takva da je

$$e^{l(z)} = z - a, \qquad \forall z \in \Omega.$$

Dokaz Leme 1

Budući da je $\Omega \neq \mathbb{C}$, postoji $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Tada je $z - a \neq 0$ za svaki $z \in \Omega$.

Budući da je područje Ω jednostavno povezano, po Napomeni 1 možemo definirati holomorfnu funkcija $\log(z-a)$, odnosno postoji holomorfna funkcija $l : \Omega \to \mathbb{C}$ takva da je

$$e^{l(z)} = z - a, \qquad \forall z \in \Omega.$$

Funkcija $l(z)$ je očito injektivna (jer je funkcija $z - a$ injektivna).

Dokaz Leme 1

Budući da je $\Omega \neq \mathbb{C}$, postoji $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Tada je $z - a \neq 0$ za svaki $z \in \Omega$.

Budući da je područje Ω jednostavno povezano, po Napomeni 1 možemo definirati holomorfnu funkcija $\log(z - a)$, odnosno postoji holomorfna funkcija $l : \Omega \to \mathbb{C}$ takva da je

$$e^{l(z)} = z - a, \qquad \forall z \in \Omega.$$

Funkcija $l(z)$ je očito injektivna (jer je funkcija $z - a$ injektivna).

Štoveše, ako su z_1, z_2 različite točke iz Ω, tada $l(z_2) - l(z_1)$ nije u $2\pi i\mathbb{Z}$. Posebno, $l(z) \neq l(z_0) + 2\pi i$, $\forall z \in \Omega$.

Dokaz Leme 1- nastavak

Tvrdimo da u stvari vrijedi:

$$\exists \epsilon > 0 \ \text{ tako da je } \ |l(z) - (l(z_0) + 2\pi i)| > \epsilon, \ \forall z \in \Omega. \tag{1}$$

Dokaz Leme 1- nastavak

Tvrdimo da u stvari vrijedi:

$$\exists \epsilon > 0 \text{ tako da je } |l(z) - (l(z_0) + 2\pi i)| > \epsilon, \ \forall z \in \Omega. \qquad (1)$$

Naime, pretpostavimo da (1) nije istina.

Dokaz Leme 1- nastavak

Tvrdimo da u stvari vrijedi:

$$\exists \epsilon > 0 \ \text{ tako da je } \ |l(z) - (l(z_0) + 2\pi i)| > \epsilon, \ \forall z \in \Omega. \qquad (1)$$

Naime, pretpostavimo da (1) nije istina.

Tada postoji niz z_n u Ω takav da $l(z_n)$ teži prema $l(z_0) + 2\pi i$.

Dokaz Leme 1- nastavak

Tvrdimo da u stvari vrijedi:

$$\exists \epsilon > 0 \text{ tako da je } |l(z) - (l(z_0) + 2\pi i)| > \epsilon, \ \forall z \in \Omega. \tag{1}$$

Naime, pretpostavimo da (1) nije istina.

Tada postoji niz z_n u Ω takav da $l(z_n)$ teži prema $l(z_0) + 2\pi i$.

Primjenom eksponencijalne funkcije dobivamo da z_n konvergira prema z_0.

Dokaz Leme 1- nastavak

Tvrdimo da u stvari vrijedi:

$$\exists \epsilon > 0 \ \text{ tako da je } \ |l(z) - (l(z_0) + 2\pi i)| > \epsilon, \ \forall z \in \Omega. \qquad (1)$$

Naime, pretpostavimo da (1) nije istina.

Tada postoji niz z_n u Ω takav da $l(z_n)$ teži prema $l(z_0) + 2\pi i$.

Primjenom eksponencijalne funkcije dobivamo da z_n konvergira prema z_0.

Funkcija l je neprekidna pa slijedi da $l(z_n)$ teži u $l(z_0)$, ali to je kontradikcija s tim da $l(z_n)$ teži prema $l(z_0) + 2\pi i$. To dokazuje (1).

Dokaz Leme 1- nastavak

Sada promotrimo funkciju

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{l(z) - l(z_0) - 2\pi i}.$$

Dokaz Leme 1- nastavak

Sada promotrimo funkciju

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{l(z) - l(z_0) - 2\pi i}.$$

Prema gornjemu, $\tilde{f}$ je ograničena (s $R = \frac{1}{\epsilon}$), injektivna i holomorfna funkcija na Ω; posebno, $\tilde{f} : \Omega \to K(0, R)$.

Dokaz Leme 1- nastavak

Sada promotrimo funkciju

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{l(z) - l(z_0) - 2\pi i}.$$

Prema gornjemu, $\tilde{f}$ je ograničena (s $R = \frac{1}{\epsilon}$), injektivna i holomorfna funkcija na Ω; posebno, $\tilde{f} : \Omega \to K(0, R)$.

Ako je $\tilde{f}(z_0) = a$, onda je

$$f(z) = \frac{\tilde{f}(z) - a}{R + |a|}$$

funkcija koja je element familije $\mathcal{F}$. To dokazuje Lemu 1. $\square$

Dokaz Teorema - nastavak

Neka je sada

$$\lambda = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(z_0)|.$$

Tvrdimo da je $\lambda > 0$.

Dokaz Teorema - nastavak

Neka je sada

$$\lambda = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(z_0)|.$$

Tvrdimo da je $\lambda > 0$.

Za to dokazati, dovoljno je vidjeti da je $f'(z_0) \neq 0$ za funkciju f konstruiranu u dokazu Leme 1.

Dokaz Teorema - nastavak

Neka je sada

$$\lambda = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(z_0)|.$$

Tvrdimo da je $\lambda > 0$.

Za to dokazati, dovoljno je vidjeti da je $f'(z_0) \neq 0$ za funkciju f konstruiranu u dokazu Leme 1.

Kad bi $f'(z_0)$ bilo jednako 0, onda bi zbog $f(z_0) = 0$, f imala u z_0 nultočku reda barem 2.

Dokaz Teorema - nastavak

Neka je sada

$$\lambda = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(z_0)|.$$

Tvrdimo da je $\lambda > 0$.

Za to dokazati, dovoljno je vidjeti da je $f'(z_0) \neq 0$ za funkciju f konstruiranu u dokazu Leme 1.

Kad bi $f'(z_0)$ bilo jednako 0, onda bi zbog $f(z_0) = 0$, f imala u z_0 nultočku reda barem 2.

Po Weierstrassovom pripremnom teoremu, tada bi postojali $K(z_0, \delta) \subset \Omega$ i $K(0, \epsilon) \subset K(0, 1)$ takvi da za $w \in K^*(0, \epsilon)$ postoje barem dva z takva da je $f(z) = w$, što je kontradikcija s injektivnosti od f.

Dokaz Teorema - nastavak

Neka je sada

$$\lambda = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(z_0)|.$$

Tvrdimo da je $\lambda > 0$.

Za to dokazati, dovoljno je vidjeti da je $f'(z_0) \neq 0$ za funkciju f konstruiranu u dokazu Leme 1.

Kad bi $f'(z_0)$ bilo jednako 0, onda bi zbog $f(z_0) = 0$, f imala u z_0 nultočku reda barem 2.

Po Weierstrassovom pripremnom teoremu, tada bi postojali $K(z_0, \delta) \subset \Omega$ i $K(0, \epsilon) \subset K(0, 1)$ takvi da za $w \in K^*(0, \epsilon)$ postoje barem dva z takva da je $f(z) = w$, što je kontradikcija s injektivnosti od f.

Slijedi da je $f'(z_0) \neq 0$, pa je $\lambda > 0$.

Lema 2

Postoji funkcija $F \in \mathcal{F}$ takva da je $|F'(z_0)| = \lambda$.

Dokaz Leme 2

Neka je f_n niz funkcija u $\mathcal{F}$ tako da

$$\lim_{n\to\infty} |f_n'(z_0)| = \lambda.$$

Dokaz Leme 2

Neka je f_n niz funkcija u $\mathcal{F}$ tako da

$$\lim_{n\to\infty} |f_n'(z_0)| = \lambda.$$

Budući da je $|f_n(z)| < 1$, Montelov teorem povlači da niz f_n ima podniz koji lokalno uniformno konvergira holomorfnoj funkciji F koja zadovoljava $|F(z)| \leq 1$ i $F(z_0) = 0$.

Dokaz Leme 2

Neka je f_n niz funkcija u $\mathcal{F}$ tako da

$$\lim_{n \to \infty} |f_n'(z_0)| = \lambda.$$

Budući da je $|f_n(z)| < 1$, Montelov teorem povlači da niz f_n ima podniz koji lokalno uniformno konvergira holomorfnoj funkciji F koja zadovoljava $|F(z)| \leq 1$ i $F(z_0) = 0$.

Štoviše, budući da i derivacije lokalno uniformno konvergiraju, mora vrijediti $|F'(z_0)| = \lambda$.

Dokaz Leme 2 - nastavak

Tvrdimo da F preslikava Ω u $K(0,1)$, tj. da je $|F(z)| < 1$ za sve $z \in \Omega$.

Dokaz Leme 2 - nastavak

Tvrdimo da F preslikava Ω u $K(0,1)$, tj. da je $|F(z)| < 1$ za sve $z \in \Omega$.

Kao prvo, $|F'(z_0)| = \lambda > 0$ povlači da F nije konstanta.

Dokaz Leme 2 - nastavak

Tvrdimo da F preslikava Ω u $K(0,1)$, tj. da je $|F(z)| < 1$ za sve $z \in \Omega$.

Kao prvo, $|F'(z_0)| = \lambda > 0$ povlači da F nije konstanta.

Pretpostavimo da postoji $a \in \Omega$ takav da je $|F(a)| = 1$.

Dokaz Leme 2 - nastavak

Tvrdimo da F preslikava Ω u $K(0,1)$, tj. da je $|F(z)| < 1$ za sve $z \in \Omega$.

Kao prvo, $|F'(z_0)| = \lambda > 0$ povlači da F nije konstanta.

Pretpostavimo da postoji $a \in \Omega$ takav da je $|F(a)| = 1$.

Tada funkcija $|F(z)|$ postiže maksimum na Ω što je u kontradikciji s principom maksimuma modula.

Dokaz Leme 2 - nastavak

Tvrdimo da F preslikava Ω u $K(0,1)$, tj. da je $|F(z)| < 1$ za sve $z \in \Omega$.

Kao prvo, $|F'(z_0)| = \lambda > 0$ povlači da F nije konstanta.

Pretpostavimo da postoji $a \in \Omega$ takav da je $|F(a)| = 1$.

Tada funkcija $|F(z)|$ postiže maksimum na Ω što je u kontradikciji s principom maksimuma modula.

Zato mora biti $|F(z)| < 1$ za sve $z \in \Omega$, kao što smo i tvrdili.

Dokaz Leme 2 - nastavak

Tvrdimo da F preslikava Ω u $K(0,1)$, tj. da je $|F(z)| < 1$ za sve $z \in \Omega$.

Kao prvo, $|F'(z_0)| = \lambda > 0$ povlači da F nije konstanta.

Pretpostavimo da postoji $a \in \Omega$ takav da je $|F(a)| = 1$.

Tada funkcija $|F(z)|$ postiže maksimum na Ω što je u kontradikciji s principom maksimuma modula.

Zato mora biti $|F(z)| < 1$ za sve $z \in \Omega$, kao što smo i tvrdili.

Napokon, da dokažemo da je $F \in \mathcal{F}$, još trebamo vidjeti da je F injekcija. Ali to slijedi iz Hurwitzovog teorema, s obzirom da F nije konstanta i da su sve f_n injektivne. $\square$

Dokaz Teorema - nastavak

Neka je F funkcija iz Leme 2. S obzirom da je $F'(z_0) \neq 0$, možemo komponirati s odgovarajućom rotacijom i pretpostaviti da je $F'(z_0)$ pozitivan realan broj.

Dokaz Teorema - nastavak

Neka je F funkcija iz Leme 2. S obzirom da je $F'(z_0) \neq 0$, možemo komponirati s odgovarajućom rotacijom i pretpostaviti da je $F'(z_0)$ pozitivan realan broj.

Tvrdimo da je F traženi holomorfni izomorfizam.

Dokaz Teorema - nastavak

Neka je F funkcija iz Leme 2. S obzirom da je $F'(z_0) \neq 0$, možemo komponirati s odgovarajućom rotacijom i pretpostaviti da je $F'(z_0)$ pozitivan realan broj.

Tvrdimo da je F traženi holomorfni izomorfizam.

Već znamo da je $F : \Omega \to K(0,1)$ holomorfna i injektivna, da je $F(z_0) = 0$ i da je $F'(z_0)$ pozitivan realan broj.

Dokaz Teorema - nastavak

Neka je F funkcija iz Leme 2. S obzirom da je $F'(z_0) \neq 0$, možemo komponirati s odgovarajućom rotacijom i pretpostaviti da je $F'(z_0)$ pozitivan realan broj.

Tvrdimo da je F traženi holomorfni izomorfizam.

Već znamo da je $F : \Omega \to K(0, 1)$ holomorfna i injektivna, da je $F(z_0) = 0$ i da je $F'(z_0)$ pozitivan realan broj.

Po Teoremu o holomorfnom izomorfizmu, dovoljno je dokazati da je F surjektivno preslikavanje.

Dokaz Teorema - nastavak

Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $\alpha \in K(0,1)$ takav da je $F(z) \neq \alpha$, $\forall z \in \Omega$.

Dokaz Teorema - nastavak

Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $\alpha \in K(0,1)$ takav da je $F(z) \neq \alpha$, $\forall z \in \Omega$.

Pokazat ćemo da u tom slučaju postoji $G \in \mathcal{F}$ sa svojstvom $|G'(z_0)| > |F'(z_0)|$.

Dokaz Teorema - nastavak

Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $\alpha \in K(0,1)$ takav da je $F(z) \neq \alpha$, $\forall z \in \Omega$.

Pokazat ćemo da u tom slučaju postoji $G \in \mathcal{F}$ sa svojstvom $|G'(z_0)| > |F'(z_0)|$.

Ako pronađemo takav G, onda dobivamo kontradikciju s izborom F i dokaz će biti završen.

Dokaz Teorema - nastavak

Najprije za svaki $\beta \in K(0,1)$ promotrimo funkciju

$$\psi_\beta : K(0,1) \to K(0,1), \qquad \psi_\beta(z) = \frac{\beta - z}{1 - \bar{\beta} z}.$$

Dokaz Teorema - nastavak

Najprije za svaki $\beta \in K(0,1)$ promotrimo funkciju

$$\psi_\beta : K(0,1) \to K(0,1), \qquad \psi_\beta(z) = \frac{\beta - z}{1 - \bar{\beta} z}.$$

Tada je ψ_β bijekcija sa $K(0,1)$ na $K(0,1)$; naime, lako se izračuna da postoji inverz. (U stvari, $\psi_\beta^{-1} = \psi_\beta$.)

Dokaz Teorema - nastavak

Najprije za svaki $\beta \in K(0,1)$ promotrimo funkciju

$$\psi_\beta : K(0,1) \to K(0,1), \qquad \psi_\beta(z) = \frac{\beta - z}{1 - \bar{\beta} z}.$$

Tada je ψ_β bijekcija sa $K(0,1)$ na $K(0,1)$; naime, lako se izračuna da postoji inverz. (U stvari, $\psi_\beta^{-1} = \psi_\beta$.)

Budući da je $\psi_\alpha(z) = 0$ ako i samo ako je $z = \alpha$, funkcija $\psi_\alpha \circ F$ nema nultočaka na Ω, pa je po Napomeni 1 dobro definirana funkcija $\log(\psi_\alpha \circ F)(z)$.

Dokaz Teorema - nastavak

Najprije za svaki $\beta \in K(0,1)$ promotrimo funkciju

$$\psi_\beta : K(0,1) \to K(0,1), \qquad \psi_\beta(z) = \frac{\beta - z}{1 - \bar{\beta} z}.$$

Tada je ψ_β bijekcija sa $K(0,1)$ na $K(0,1)$; naime, lako se izračuna da postoji inverz. (U stvari, $\psi_\beta^{-1} = \psi_\beta$.)

Budući da je $\psi_\alpha(z) = 0$ ako i samo ako je $z = \alpha$, funkcija $\psi_\alpha \circ F$ nema nultočaka na Ω, pa je po Napomeni 1 dobro definirana funkcija $\log(\psi_\alpha \circ F)(z)$.

Slijedi da možemo definirati i funkciju

$$g(z) = \sqrt{(\psi_\alpha \circ F)(z)} = e^{\frac{1}{2} \log(\psi_\alpha \circ F)(z)}.$$

Dokaz Teorema - nastavak

Tada je $g(z_0) = \sqrt{\alpha}$, pa funkciju g modificiramo da dobijemo element familije $\mathcal{F}$:

$$G(z) = (\psi_{g(z_0)} \circ g)(z).$$

Dokaz Teorema - nastavak

Tada je $g(z_0) = \sqrt{\alpha}$, pa funkciju g modificiramo da dobijemo element familije $\mathcal{F}$:

$$G(z) = (\psi_{g(z_0)} \circ g)(z).$$

Sada je $G(z_0) = 0$. Štoviše, $G(z)$ je injektivna funkcija, jer su $\psi_{g(z_0)}$ i g injektivne, pa je $G \in \mathcal{F}$.

Dokaz Teorema - nastavak

Tada je $g(z_0) = \sqrt{\alpha}$, pa funkciju g modificiramo da dobijemo element familije $\mathcal{F}$:

$$G(z) = (\psi_{g(z_0)} \circ g)(z).$$

Sada je $G(z_0) = 0$. Štoviše, $G(z)$ je injektivna funkcija, jer su $\psi_{g(z_0)}$ i g injektivne, pa je $G \in \mathcal{F}$.

Tvrdimo da je

$$|G'(z_0)| > |F'(z_0)|; \tag{2}$$

ako to dokažemo, dokaz teorema je gotov.

Dokaz Teorema - nastavak

Da dokažemo (2), primijetimo najprije da je

$$F(z) = (\psi_\alpha^{-1} \circ s \circ \psi_{g(z_0)}^{-1} \circ G)(z) = (\Phi \circ G)(z),$$

gdje je $s(w) = w^2$, i

$$\Phi = \psi_\alpha^{-1} \circ s \circ \psi_{g(z_0)}^{-1} : K(0,1) \to K(0,1).$$

Dokaz Teorema - nastavak

Da dokažemo (2), primijetimo najprije da je

$$F(z) = (\psi_\alpha^{-1} \circ s \circ \psi_{g(z_0)}^{-1} \circ G)(z) = (\Phi \circ G)(z),$$

gdje je $s(w) = w^2$, i

$$\Phi = \psi_\alpha^{-1} \circ s \circ \psi_{g(z_0)}^{-1} : K(0,1) \to K(0,1).$$

Tada vrijedi

$$\Phi(0) = \psi_\alpha^{-1}(s(\psi_{g(z_0)}^{-1}(0))) = \psi_\alpha^{-1}(s(g(z_0))) = \psi_\alpha^{-1}(\psi_\alpha(F(z_0))) = F(z_0) = 0.$$

Dokaz Teorema - nastavak

Sada Schwartzova lema povlači da je

$$|\Phi(z)| \leq |z|, \qquad \text{i} \quad |\Phi'(0)| \leq 1.$$

Dokaz Teorema - nastavak

Sada Schwartzova lema povlači da je

$$|\Phi(z)| \leq |z|, \qquad \text{i} \quad |\Phi'(0)| \leq 1.$$

Štoviše, ako bi bilo $|\Phi'(0)| = 1$, onda bi vrijedilo $\Phi(z) = az$ za neki $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$.

Dokaz Teorema - nastavak

Sada Schwartzova lema povlači da je

$$|\Phi(z)| \leq |z|, \qquad \text{i} \quad |\Phi'(0)| \leq 1.$$

Štoviše, ako bi bilo $|\Phi'(0)| = 1$, onda bi vrijedilo $\Phi(z) = az$ za neki $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$.

Posebno, Φ bi bila injektivna funkcija, ali Φ ne može biti injektivna jer uključuje kvadriranje s koje nije injektivno.

Dokaz Teorema - nastavak

Sada Schwartzova lema povlači da je

$$|\Phi(z)| \leq |z|, \qquad \text{i} \quad |\Phi'(0)| \leq 1.$$

Štoviše, ako bi bilo $|\Phi'(0)| = 1$, onda bi vrijedilo $\Phi(z) = az$ za neki $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$.

Posebno, Φ bi bila injektivna funkcija, ali Φ ne može biti injektivna jer uključuje kvadriranje s koje nije injektivno.

Dakle je $|\Phi'(0)| < 1$. Slijedi da je

$$|F'(z_0)| = |\Phi'(G(z_0))G'(z_0)| = |\Phi'(0)G'(z_0)| < |G'(z_0)|,$$

čime je dokaz Teorema završen.